Conjunto de problemas 3.1

1. Entre os vetores v_1, v_2, v_3 e v_4, quais pares são ortogonais?

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad u_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Encontre: um vetor x ortogonal para o espaço-linha de A, um vetor y ortogonal para o espaço-coluna e um vetor z ortogonal para o espaço nulo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Encontre em $\mathbf{R}^3$ todos os vetores que são ortogonais a $(1, 1, 1)$ e $(1, -1, 0)$. Produza uma base ortonormal a partir desses vetores (vetores unitários simultaneamente ortogonais).

4. Duas retas em um plano são perpendiculares quando o produto de seus coeficientes angulares é -1. Aplique isto aos vetores $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$, cujos coeficientes angulares são x_2/x_1 e y_2/y_1, para obter novamente a condição de ortogonalidade $x^{\mathrm{T}}y = 0$.

5. Dê um exemplo, em $\mathbf{R}^2$, de vetores linearmente independentes que não são ortogonais. Forneça também um exemplo de vetores ortogonais que não são independentes.

6. Como podemos saber que a *i-ésima* linha de uma matriz B invertível é ortogonal à *j-ésima* coluna de B^{-1}, se $i \neq j$?

7. Encontre os módulos e o produto escalar de $x = (1, 4, 0, 2)$ e $y = (2, -2, 1, 3)$.

8. *Por que estas afirmações são falsas?*

(a) Se $\mathbf{V}$ é ortogonal a $\mathbf{W}$, então $\mathbf{V}^{\perp}$ é ortogonal a $\mathbf{W}^{\perp}$.

(b) $\mathbf{V}$ ortogonal a $\mathbf{W}$ e $\mathbf{W}$ ortogonal a $\mathbf{Z}$ faz $\mathbf{V}$ ser ortogonal a $\mathbf{Z}$.

9. Encontre uma base para o complemento ortogonal do espaço-linha de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Decomponha $x = (3, 3, 3)$ em um componente de espaço-linha x_r e um componente de espaço nulo x_n.

10. Seja $\mathbf{P}$ o plano em $\mathbf{R}^2$ com a equação $x + 2y - z = 0$. Encontre um vetor perpendicular a $\mathbf{P}$. Qual matriz possui o plano $\mathbf{P}$ como seu espaço nulo? Qual matriz possui $\mathbf{P}$ como seu espaço-linha?

11. Encontre todos os vetores que são perpendiculares a $(1, 4, 4, 1)$ e $(2, 9, 8, 2)$.

12. Demonstre que $x - y$ é ortogonal a $x + y$ se, e somente se, $\|x\| = \|y\|$.

13. Seja $\mathbf{S}$ o subespaço de $\mathbf{R}^4$ contendo todos os vetores com $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Encontre a base para o espaço $\mathbf{S}^{\perp}$ que contenha todos os vetores ortogonais a $\mathbf{S}$.

14. Encontre o complemento ortogonal do plano gerado pelos vetores $(1, 1, 2)$ e $(1, 2, 3)$, considerando que estes são as linhas de A e resolvendo $Ax = 0$. Lembre-se de que o complemento é uma reta completa.

15. Seja $\mathbf{S}$ um subespaço de $\mathbf{R}^n$. Explique o que significa $(\mathbf{S}^\perp)^\perp = \mathbf{S}$ e por que esta sentença é verdadeira.

16. Ilustre a ação de A^T com uma figura que corresponda à Figura 3.4 retornando $\boldsymbol{C}(A)$ ao espaço-linha e o espaço nulo à esquerda a zero.

17. Sendo $\mathbf{S} = \{0\}$ o subespaço de $\mathbf{R}^4$ contendo apenas o vetor nulo, o que é $\mathbf{S}^\perp$? Sendo $\mathbf{S}$ gerado por $(0, 0, 0, 1)$, o que é $\mathbf{S}^\perp$? O que é $(\mathbf{S}^\perp)^\perp$?

18. Se $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ são subespaços ortogonais, demonstre que o único vetor comum entre eles é o vetor nulo: $\mathbf{V} \cap \mathbf{W} = \{0\}$.

19. O teorema fundamental geralmente é descrito como *alternativa de Fredholm*: para qualquer A e b, um, e somente um, dos seguintes sistemas tem uma solução:

(i) $Ax = b$.

(ii) $A^Ty = 0$, $y^Tb \neq 0$.

Pode tanto b estar em um espaço-coluna $\boldsymbol{C}(A)$ quanto haver um y em $\boldsymbol{N}(A^T)$ tal que $y^Tb \neq 0$. Demonstre que é contraditório que ambas as expressões (i) e (ii) tenham soluções.

20. Sendo $\mathbf{V}$ o complemento ortogonal de $\mathbf{W}$ em $\mathbf{R}^n$, existe alguma matriz com espaço-linha $\mathbf{V}$ e espaço nulo $\mathbf{W}$? Construa tal matriz, iniciando com uma base de $\mathbf{V}$.

21. Encontre uma matriz cujo espaço-linha contenha $(1, 2, 1)$ e cujo espaço nulo contenha $(1, -2, 1)$, ou prove que não é possível existir tal matriz.

22. Crie uma equação homogênea com três incógnitas, cujas soluções serão as combinações lineares dos vetores $(1, 1, 2)$ e $(1, 2, 3)$. O proposto aqui é o inverso do exercício anterior, mas, na verdade, os dois problemas são iguais.

23. Se $AB = 0$, então as colunas de B estão a _______ de A. As linhas de A estão a _______ de B. Por que A e B não podem ser matrizes 3 por 3 de posto 2?

24. Considere a Figura 3.4. Como é possível saber que Ax_r é igual a Ax? Como é possível saber que este vetor está no espaço-coluna? Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, o que é x_r?

25. (a) Se $Ax = b$ possui uma solução e $A^Ty = 0$, então y é perpendicular a _______.
(b) Se $A^Ty = c$ possui uma solução e $Ax = 0$, então x é perpendicular a _______.

26. Se Ax está no espaço nulo de A^T, então $Ax = 0$. Razão: Ax está também no _______ de A e os espaços são _______. *Conclusão*: A^TA *possui o mesmo espaço nulo que* A.

27. (Recomendado) Desenhe a Figura 3.4 para demonstrar cada subespaço de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

28. Desenhe novamente a Figura 3.4 para uma matriz 3 por 2 de posto $r = 2$. Qual subespaço é $\mathbf{Z}$ (apenas vetor nulo)? A componente de espaço nulo de qualquer vetor x em $\mathbf{R}^2$ é $x_n =$ ____.

29. Abaixo há um sistema de equações $Ax = b$ para o qual *não há solução*:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 5 \\ 2x + 2y + 3z &= 5 \\ 3x + 4y + 5z &= 9. \end{aligned}$$

Encontre números y_1, y_2, y_3 para multiplicar as equações, de forma que se somem a $0 = 1$. Em qual subespaço você descobriu um vetor y? O produto escalar y^Tb é 1.

30. Crie uma matriz 2 por 2 assimétrica de posto 1. Copie a Figura 3.4 e coloque um vetor em cada subespaço. Quais vetores são ortogonais?

31. Encontre as componentes x_r e x_n e desenhe a Figura 3.4 corretamente se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

32. Crie uma matriz com a propriedade pedida. Se não for possível, justifique.

(a) O espaço-coluna contém $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, o espaço nulo contém $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) O espaço-linha contém $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, o espaço nulo contém $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(c) $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ tem uma solução e $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(d) Cada linha é ortogonal a cada coluna (A não é a matriz nula).

(e) As colunas somam-se a uma coluna de zeros, as linhas somam-se a uma linha de números 1.

33. Seja A uma matriz simétrica ($A^{\mathrm{T}} = A$).

(a) Por que seu espaço-coluna é perpendicular ao seu espaço nulo?

(b) Sendo $Ax = 0$ e $Az = 5z$, quais são os subespaços que contêm esses "autovetores" x e z? **Matrizes simétricas possuem autovetores perpendiculares** (ver Seção 5.5).

Os problemas 34 a 44 tratam de subespaços ortogonais.

34. O piso e a parede não são subespaços ortogonais, uma vez que compartilham um vetor que não é zero (passando pela linha onde se encontram). Dois planos em $\mathbf{R}^3$ não podem ser ortogonais! Encontre um vetor nos espaços-coluna $\boldsymbol{C}(A)$ e $\boldsymbol{C}(B)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Este será um vetor Ax e também $B\hat{x}$. Pense em uma matriz $[A \;\; B]$ 3 por 4.

35. Seja $\mathbf{S}$ gerado pelos vetores (1, 2, 2, 3) e (1, 3, 3, 2). Encontre dois vetores que gerem $\mathbf{S}^{\perp}$. Isto é, análogo a resolver $Ax = 0$ para qual matriz A?

36. Considerando que $\mathbf{S}$ contenha apenas (1, 5, 1) e (2, 2, 2) (não é um subespaço). Então, $\mathbf{S}^{\perp}$ é o espaço nulo da matriz $A =$ _______. $\mathbf{S}^{\perp}$ será um subespaço mesmo se $\mathbf{S}$ não for.

37. Aplique ao problema 34 um subespaço $\mathbf{V}$ p-dimensional e um subespaço $\mathbf{W}$ q-dimensional de $\mathbf{R}^n$. Qual desigualdade em $p + q$ garante que haja interseção de $\mathbf{V}$ em $\mathbf{W}$ em um vetor não nulo? Tais subespaços não podem ser ortogonais.

38. Considerando que um subespaço $\mathbf{S}$ está contido em um subespaço $\mathbf{V}$, prove que $\mathbf{S}^{\perp}$ contém $\mathbf{V}^{\perp}$.

39. Considerando que $\mathbf{P}$ é um plano de vetores em $\mathbf{R}^4$ que satisfaz $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, escreva uma base para $\mathbf{P}^{\perp}$. Crie uma matriz que tenha $\mathbf{P}$ como seu espaço nulo.

40. Seja **V** o espaço inteiro $\mathbf{R}^4$. Considere também que $\mathbf{V}^\perp$ contém apenas o vetor _______. Assim, $(\mathbf{V}^\perp)^\perp$ é _______. Dessa maneira, $(\mathbf{V}^\perp)^\perp$ é o mesmo que _______.

41. Sendo **S** o subespaço de $\mathbf{R}^3$ contendo apenas o vetor nulo, o que é $\mathbf{S}^\perp$? Sendo **S** gerado por (1, 1, 1,), o que é $\mathbf{S}^\perp$? Sendo **S** gerado por (2, 0, 0) e (0, 0, 3), o que é $\mathbf{S}^\perp$?

42. Coloque bases para os subespaços ortogonais **V** e **W** nas colunas das matrizes V e W. *Por que* $\mathrm{V}^\mathrm{T}\mathrm{W} =$ *matriz nula*? Isto equivale a $v^\mathrm{T}w = 0$ para vetores.

43. Utilizando a matriz abreviada da equação (8), prove que cada y em $N(A^\mathrm{T})$ é perpendicular a cada Ax no espaço-coluna. Comece a partir de $A^\mathrm{T}y = 0$.

44. Seja **L** um subespaço de uma dimensão (uma reta) em $\mathbf{R}^3$. Seu complemento ortogonal $\mathbf{L}^\perp$ é _______ perpendicular à **L**. Assim, $(\mathbf{L}^\perp)^\perp$ é a _______ perpendicular à $\mathbf{L}^\perp$. De fato, $(\mathbf{L}^\perp)^\perp$ é igual a _______.

Os problemas 45 a 50 abordam linhas e colunas perpendiculares.

45. Considerando que todas as colunas de A são vetores unitários, todos simultaneamente perpendiculares, descubra $A^\mathrm{T}A$.

46. Crie uma matriz A, 3 por 3, na qual não haja zeros, e cujas colunas sejam simultaneamente perpendiculares. Calcule $A^\mathrm{T}A$. Por que esta é uma matriz diagonal?

47. Seja uma matriz n por n inversível: $AA^{-1} = I$. Sendo assim, a primeira coluna de A^{-1} é ortogonal ao espaço gerado por quais linhas de A?

48. As retas $3x + y = b_1$ e $6x + 2y = b_2$ são _______. Elas serão a mesma reta se _______. Neste caso, (b_1, b_2) é perpendicular ao vetor _______. O espaço nulo da matriz é a linha $3x + y =$ _______. Um vetor particular em tal espaço nulo é _______.

49. O comando $N = \mathrm{null}(A)$ produzirá uma base para o espaço nulo de A. Dessa maneira, o comando $B = \mathrm{null}(N')$ produzirá uma base para _______ de A.

50. Por que estas afirmações são falsas?

(a) (1, 1, 1) é perpendicular a (1, 1, –2), de forma que os planos $x + y + z = 0$ e $x + y - 2z = 0$ são subespaços ortogonais.

(b) O subespaço gerado por (1, 1, 0, 0, 0) e (0, 0, 0, 1, 1) é o complemento ortogonal do subespaço gerado por (1, –1, 0, 0, 0) e (2, –2, 3, 4, –4).

(c) Dois subespaços que se intersectam apenas no vetor nulo são ortogonais.

51. Encontre uma matriz com $v = (1, 2, 3)$ no espaço-linha e no espaço-coluna. Encontre outra matriz com v no espaço nulo e no espaço-coluna. Em quais pares de subespaços *não* é possível haver v?

52. Seja A, 3 por 4, B, 4 por 5, e $AB = 0$. Prove que posto (A) + posto $(B) \leq 4$.